Prova di "*matematica lunga*" del 18/03/2015

Puoi rispondere a non più di dieci quesiti. Il punteggio massimo degli esercizi segnati con l'asterisco (*) è 9, mentre il punteggio degli altri è 6.

1. Disegna tre circonferenze di raggio unitario e segna su di esse i seguenti angoli e i corrispondenti punti alla circonferenza:
   a) 405º
   b) −120º
   c) $\frac{3\pi}{4}$ rad.

2. a) Disegna il grafico della regione di piano definita dalle disequazioni $0 \leq y \leq \sqrt{|x|}$, per $-1 \leq x \leq 1$.
   b) Risolvi l'equazione $x\sqrt{1+x} = \sqrt{2x}$.

3. Tra gli abitanti di Helsinki, il numero di madrelingua stranieri è cresciuto del 7,5 percento all'anno nell'intervallo 2003-2013. Nel 2013 è stato stimato che nel periodo 2013-2033 il numero in questione raddoppierà ancora. Calcola l'aumento percentuale medio annuo atteso del numero di madrelingua stranieri in questi 30 anni.

4. Considera l'equazione $t^4x^2 + (t^2 + 1)x + 1 = 0$, con t parametro reale, $t \neq 0$.
   a) Risolvi l'equazione per $t = 1$.
   b) Determina tutti i valori del parametro $t \neq 0$, per i quali l'equazione ha almeno una soluzione $x \in \mathbf{R}$.

5. Siano dati $A = (-2,2)$, $B = (3,1)$, $C = (-2,3)$ e $D = (1,-1)$. Calcola il valore esatto delle coordinate del punto di intersezione dei segmenti AB e CD.

6. Supponiamo che il quoziente intellettivo della popolazione segua la distribuzione normale $N(100,15)$.
   Determina un intervallo simmetrico, intorno al valore atteso 100, al quale appartenga circa la metà della popolazione.

7. a) Per quali valori di x è definita l'espressione $\ln(\sin x)$? La variabile x è indicata in radianti.
   b) Determina i valori approssimati alla seconda cifra decimale di tutte le soluzioni dell'equazione $|\ln(\sin x)| = 2$ nell'intervallo $0 < x < 10$.

8. Una cisterna d'olio ha la forma di un cilindro con l'asse orizzontale. Il diametro della sezione perpendicolare all'asse è 1,3 metri.
    a) Determina la lunghezza della cisterna, se il suo volume è 3000 litri.
    b) L'altezza dell'olio nel punto più profondo misura 40 centimetri. Quanti litri di olio sono rimasti nella cisterna?

<http://www.tankkituomiset.fi/palavan-nesteen-sailiot/kuivurisailiot>. Letto il 20/2/2014.

9. Per fare una tenda a forma di cono si vogliono utilizzare 16 metri quadrati di stoffa. La stoffa non viene usata per il fondo della tenda. Determina il diametro del cerchio di base, nel caso in cui il volume della tenda è massimo.

<http://www.indios.cz/cs/rytirske-a-stredoveke-stany/merlin/>. Letto il 3/2/2014.

10. Sia $a > 0$. Il grafico $y = f(x)$ della funzione di variabile reale definita da $f(x) = a\sqrt{x}$ ruota attorno all'asse x nell'intervallo $[0,1]$. Il volume del solido di rotazione che si forma è 2π. Determina la superficie laterale di questo solido di rotazione usando la formula che fornisce l'area A della superficie di un solido di rotazione: $A = 2\pi \int_0^1 |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$.

11. Considera il seguente numero in base 7
$a_5 7^5 + a_4 7^4 + a_3 7^3 + a_2 7^2 + a_1 7 + a_0$
Dimostra che è divisibile esattamente per il numero 6 solo se la somma dei numeri $a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ è divisibile per 6.
In questo caso a_5, a_4, a_3, a_2, a_1 e $a_0 \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

12. Nel 1225, il matematico italiano Fibonacci calcolò, per l'equazione $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$, il valore approssimato della radice $x \approx 1{,}368808108$.
    a) Dimostra che l'equazione ha esattamente una radice nell'insieme dei numeri reali.
    b) Dopo quante iterazione del metodo di Newton si ottiene per la prima volta lo stesso numero di cifre decimali dell'approssimazione di Fibonacci, se il valore di partenza è $x_0 = 1$?

13. a) Analizzando il suo rapporto incrementale, dimostra che la funzione di variabile reale definita da
$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$
è derivabile nel punto $x = 0$.

    b) Sia g (x) = $f'(x)$, per $x \in \mathbf{R}$. Analizzando il suo rapporto incrementale, dimostra che la funzione $g(x)$ non è derivabile nel punto $x = 0$.

14. * Per la mostra canina Bau-Luglio, evento di due giorni, ci si può iscrivere per la mostra del sabato, per la mostra della domenica o per entrambe. Un dato anno alla mostra canina si sono iscritti 1372 cani, dei quali 31 erano iscritti solo alla mostra del sabato e 43 solo alla mostra della domenica. Sia L l'evento "cane iscritto alla mostra del sabato" e S l'evento "cane iscritto alla mostra della domenica".
    a) Calcola la probabilità $P(L \text{ e } S)$ nel dato anno. (3 p.)
    b) Nel calcolo probabilistico, come si definisce la dipendenza di due eventi? (2 p.)
    c) Nell'anno in questione, gli eventi L e S sono indipendenti? (2 p.)
    d) Siano genericamente a il numero di cani iscritti solo alla mostra del sabato, b il numero di iscritti a entrambi i giorni e c il numero dei cani iscritti solo alla domenica. Qual è la condizione sui numeri a, b e c che rende gli eventi L e S indipendenti? (2 p.)

15. *

Considera la sommatoria $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

a) Calcola i valori della sommatoria per $n = 1,2,\ldots,5$.
Sulla base dei valori calcolati produci una congettura su come la somma dipende da *n.* (2 pt)
b) Determina i coefficienti $A \in \mathbf{R}$ e $B \in \mathbf{R}$, in modo che la formula
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$$
sia valida per tutti i valori di $k \geq 1$. (2 pt)
c) Usa la formula del precedete punto b) per verificare la correttezza della congettura che hai prodotto in a). (4 pt)
d) Determina il valore del seguente limite $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ (1 pt)